Struktura počítačů

Jan Outrata

KATEDRA INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

přednášky

Číselné soustavy

Desítková soustava

Počítač = počítací stroj ... počítání s čísly (původně)

Člověk:

- deset hodnot a symbolů pro ně: číslice **0** až **9**
- pro reprezentaci (zápis) čísla použití **desítkové (dekadické)** **poziční** **číselné soustavy**: číslo jako součet mocninné řady o základu (radixu) 10, zápis = posloupnost symbolů pro koeficienty řady, pozice (pořadí) symbolu určuje mocninu (řád)

$$(1024)_{10} = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

- jiné (poziční) číselné soustavy např. dvanáctková/čtyřiadvacítková ((půl)dny, hodiny), šedesátková (hodiny, minuty, sekundy), dvacítková (dřívější platidla) aj.
- nepoziční číselné „soustavy“ (číslice) např. římská, egyptská, jedničková aj.

Dvojková soustava

Počítač:

- první (elektro)mechanické počítací stroje dekadické (tj. používající desítkovou soustavu) – u součástí potřeba 10 stabilních stavů (pro deset hodnot)
- elektromechanické a elektronické součásti: nejsnadněji realizovatelné **2 stabilní stavy** pro 2 hodnoty, symboly (číslice) **0** a **1** ($\Rightarrow$ **digitální zařízení/elektronika**)
- pro reprezentaci (zápis) čísla použití **dvojkové (binární) poziční číselné soustavy**: číslo jako součet mocninné řady o základu 2, zápis = posloupnost symbolů pro koeficienty, pozice symbolu určuje mocninu

$$(11)_{10} = (1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

- další typy dat (čísla s řádovou čárkou, znaky a texty, obrázky, zvuky, videa atd.) odvozeny od (celých) čísel $\Rightarrow$ **binární reprezentace** všech typů dat

Dvojková soustava

Počítač:

- první (elektro)mechanické počítací stroje dekadické (tj. používající desítkovou soustavu) – u součástí potřeba 10 stabilních stavů (pro deset hodnot)
- elektromechanické a elektronické součásti: nejsnadněji realizovatelné **2 stabilní stavy** pro 2 hodnoty, symboly (číslice) **0** a **1** ($\Rightarrow$ **digitální zařízení/elektronika**)
- pro reprezentaci (zápis) čísla použití **dvojkové (binární) poziční číselné soustavy**: číslo jako součet mocninné řady o základu 2, zápis = posloupnost symbolů pro koeficienty, pozice symbolu určuje mocninu

$$(11)_{10} = (1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

- další typy dat (čísla s řádovou čárkou, znaky a texty, obrázky, zvuky, videa atd.) odvozeny od (celých) čísel $\Rightarrow$ **binární reprezentace** všech typů dat

„Počítač pro člověka“:

- použití (pozičních) číselných soustav o základu $2^k \approx 10, k \in \mathbb{N}$ („kompromis“)
  - **osmičková (oktalová)**: symboly (číslice) **0** až **7**
  - **šestnáctková (hexadecimální)**: symboly (číslice) **0** až **9** a **A** až **F**

Reprezentace čísel dle základu

Věta (O reprezentaci přirozených čísel (včetně 0))

Libovolné přirozené číslo N *(včetně 0) lze vyjádřit jako součet mocninné řady o základu* $B \geq 2, B \in \mathbb{N}$*:*

$$N = a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0,$$

kde $0 \leq a_i < B, a_i \in \mathbb{N}$ *jsou koeficienty řady.*

Číslo N *se (v poziční číselné soustavě o základu* B*) zapisuje jako řetěz symbolů (číslic)* S_i *pro koeficienty* a_i *zleva v pořadí pro* i *od* $n-1$ *k* 0*:*

$$(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$$

Hodnota čísla vs. jeho zápis

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ – postupným přičítáním:

$N = a_0$
$B' = B$
for $i = 1$ **to** $n-1$ **do**
  $N = N + a_i * B'$
  $B' = B' * B$

pro $(1024)_{10}$ $(B = 10, n = 4, a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 4)$:
$N = 4, B' = 10$
$i = 1 : N = 24, B' = 100$
$i = 2 : N = 24, B' = 1000$
$i = 3 : N = 1024, B' = 10000$

Hodnota čísla vs. jeho zápis

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ – postupným přičítáním:

$N = a_0$
$B' = B$
for $i = 1$ **to** $n-1$ **do**
  $N = N + a_i * B'$
  $B' = B' * B$

pro $(1024)_{10}$ $(B = 10, n = 4, a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 4)$:
$N = 4, B' = 10$
$i = 1 : N = 24, B' = 100$
$i = 2 : N = 24, B' = 1000$
$i = 3 : N = 1024, B' = 10000$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ (hodnoty) čísla N – postupným odečítáním:

$B' = 1, i = 0$
while $B' * B \leq N$ **do**
  $B' = B' * B$
  $i = i + 1$
for i **to** 0 **do**
  $a_i = N/B'$; celočíselné dělení
  $N = N - a_i * B'$; $= N \bmod B'$ (zbytek)
  $B' = B'/B$

pro $N = 1024, B = 10$:
$B' = 1, i = 0$
$10 \leq 1024 : B' = 10, i = 1$
$100 \leq 1024 : B' = 100, i = 2$
$1000 \leq 1024 : B' = 1000, i = 3$
$10000 \not\leq 1024$
$i = 3 : a_i = 1, N = 24, B' = 100$
$i = 2 : a_i = 0, N = 24, B' = 10$
$i = 1 : a_i = 2, N = 4, B' = 1$
$i = 0 : a_i = 4, N = 0, B' = 0$

Hodnota čísla vs. jeho zápis (rychleji)

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B + a_0 \\ &= (\cdots(\mathbf{a_{n-1}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{a_{n-2}}) \cdot \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{a_1}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{a_0} \end{aligned}$$

Hodnota čísla vs. jeho zápis (rychleji)

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B + a_0 \\ &= (\cdots(\mathbf{a_{n-1}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{a_{n-2}}) \cdot \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{a_1}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{a_0} \end{aligned}$$

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ – postupným násobením:

$N = a_{n-1}$
for $i = n-2$ **to** 0 **do**
  $N = N * B + a_i$

pro $(1024)_{10}$ $(B = 10, n = 4, a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 4)$:
$N = 1$
$i = 2 : N = 10$
$i = 1 : N = 102$
$i = 0 : N = 1024$

Hodnota čísla vs. jeho zápis (rychleji)

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B + a_0 \\ &= (\cdots(\mathbf{a_{n-1}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{a_{n-2}}) \cdot \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{a_1}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{a_0} \end{aligned}$$

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ – postupným násobením:

$N = a_{n-1}$
for $i = n-2$ **to** 0 **do**
  $N = N * B + a_i$

pro $(1024)_{10}$ $(B = 10, n = 4, a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 4)$:
$N = 1$
$i = 2 : N = 10$
$i = 1 : N = 102$
$i = 0 : N = 1024$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ (hodnoty) čísla N – postupným dělením:

$a_0 = N \bmod B$
$i = 1$
while $N \geq B$ **do**
  $N = N/B$; celočíselné dělení
  $a_i = N \bmod B$; zbytek
  $i = i + 1$

pro $N = 1024, B = 10$:
$a_0 = 4, i = 1$
$1024 \geq 10 : N = 102, a_1 = 2, i = 2$
$102 \geq 10 : N = 10, a_2 = 0, i = 3$
$10 \geq 10 : N = 1, a_3 = 1, i = 4$
$1 \not\geq 10$

Převod zápisu čísla mezi soustavami

1. získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_{B_z}$ (v soustavě o základu B_z)
2. získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_{B_{do}}$ (hodnoty) čísla N (v soustavě o základu B_{do})

- jednodušší převod zápisu čísla v soustavě o základu B^k ($k \in \mathbb{N}$) na zápis v soustavě o základu B, a naopak:

každý symbol soustavy o základu B^k zapisující nějaké číslo nahradíme k-ticí symbolů soustavy o základu B zapisující stejné číslo, a naopak (k-tice symbolů v zápisu brány zprava, chybějící symboly nahrazeny 0)

pro $B = 2, k = 4, 3, 2, 1$:
$(4CD)_{16} = (2315)_8 = (103031)_4 = (010011001101)_2$

ÚKOL

1. Pro několik čísel zjistěte (hodnotu) čísla z jeho zápisů ve dvojkové, osmičkové, desítkové a šestnáctkové soustavě.
2. Pro několik čísel zjistěte zápis (hodnoty) čísla ve dvojkové, osmičkové, desítkové a šestnáctkové soustavě.
3. Pro několik čísel převeďte zápis čísla mezi dvojkovou, osmičkovou a šestnáctkovou soustavou.

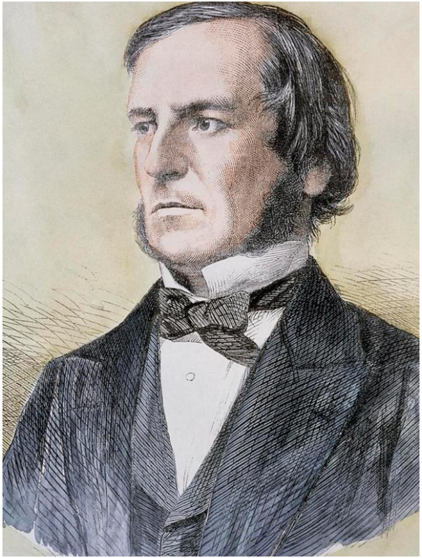
Binární logika

Binární logika

Počítač = digitální zařízení (2 stabilní stavy součástí) . . . základní operace dvouhodnotové $\Rightarrow$ binární logika

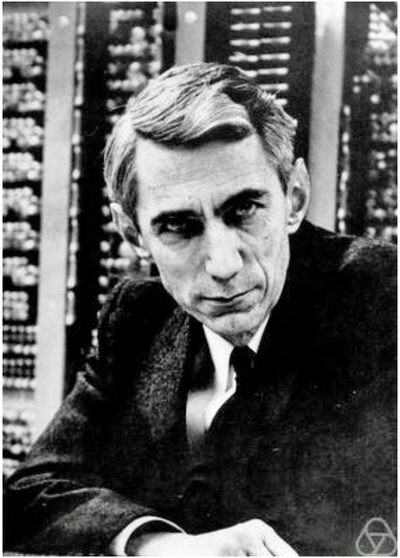
- formální logický základ: **výroková logika** – zkoumá pravdivostní hodnotu výroků (pravda/nepravda, spojky/operátory "neplatí, že" $\rightarrow$ operace negace $\neg$, "a současně platí" $\rightarrow$ konjunkce $\wedge$, "nebo platí" $\rightarrow$ disjunkce $\vee$, "jestliže platí, pak platí" $\rightarrow$ implikace $\Rightarrow$ aj.)
- výroky jako **logické výrazy** vyhodnocované na hodnoty (pravda/nepravda, 1/0)
- matematický aparát pro práci s dvouhodnotovými log. výrazy: **Booleova algebra (binární/dvouhodnotová logika)** (G. Boole, 1854) – použití i u množin
- fyzická realizace: (elektronické binární) **logické obvody** (C. E. Shannon, 1937) – základ digitálních zařízení
- univerzální, teoreticky zvládnutá, efektivně realizovatelná logickými obvody

Binární logika



George Boole, zdroj

Binární logika



Claude Elwood Shannon, zdroj

Binární logika

Logická proměnná $\mathbf{x}$

- veličina nabývající dvou možných diskrétních logických hodnot: $\mathbf{0}$ (nepravda) a $\mathbf{I}$ (pravda)
- definice: $x = \mathbf{I}$ jestliže $x \neq \mathbf{0}$ a $x = \mathbf{0}$ jestliže $x \neq \mathbf{I}$

Logická funkce $\mathbf{f(x_1, \ldots, x_n)}$

- funkce n logických proměnných $x_1, \ldots, x_n$ ($= n$-ární funkce) nabývající dvou možných diskrétních hodnot $\mathbf{0}$ (nepravda) a $\mathbf{I}$ (pravda)
- logická proměnná $=$ logická funkce identity proměnné, skládání funkcí
- základní $=$ **logické operace**

Binární logika

Logická proměnná $\mathbf{x}$

- veličina nabývající dvou možných diskrétních logických hodnot: $\mathbf{0}$ (nepravda) a $\mathbf{I}$ (pravda)
- definice: $x = \mathbf{I}$ jestliže $x \neq \mathbf{0}$ a $x = \mathbf{0}$ jestliže $x \neq \mathbf{I}$

Logická funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$

- funkce n logických proměnných $x_1, \ldots, x_n$ (= n-ární funkce) nabývající dvou možných diskrétních hodnot $\mathbf{0}$ (nepravda) a $\mathbf{I}$ (pravda)
- logická proměnná = logická funkce identity proměnné, skládání funkcí
- základní = **logické operace**

Booleova algebra (binární logika)

- algebra („matematika“) logických proměnných a logických funkcí
- dvouhodnotová algebra, algebra dvou stavů
- relace rovnosti: $f = g$, právě když $(f = \mathbf{I}$ a $g = \mathbf{I})$ nebo $(f = \mathbf{0}$ a $g = \mathbf{0})$

Logické operace

3 základní:

Negace (inverze)

- pravdivá, když operand nepravdivý, jinak nepravdivá

x	$\overline{x}$
0	**I**
I	**0**

- operátory: $\overline{x}$, $\mathrm{NOT}\ x$, $\neg x$ (výrokově negace, algebraicky negace), $\overline{X}$ (množinově doplněk)

Logické operace

Logický součin (konjunkce)

- pravdivá, když oba operandy pravdivé, jinak nepravdivá

x	y	$x \cdot y$
0	**0**	**0**
0	**I**	**0**
I	**0**	**0**
I	**I**	**I**

- operátory: $x \cdot y / xy$ (prázdný), x AND y, $x \wedge y$ (výrokově konjunkce, algebraicky průsek), $X \cap Y$ (množinově průnik)

Logické operace

Logický součet (disjunkce)

- nepravdivá, když oba operandy nepravdivé, jinak pravdivá

x	y	$x + y$
0	**0**	**0**
0	**I**	**I**
I	**0**	**I**
I	**I**	**I**

- operátory: $x + y$, $x \text{ OR } y$, $x \vee y$ (výrokově disjunkce, algebraicky spojení), $X \cup Y$ (množinově sjednocení)

Binární logika

Logický výraz

= korektně vytvořená posloupnost (symbolů) logických proměnných a funkcí (operátorů) spolu se závorkami

- priority základních operací sestupně negace, log. součin, log. součet
- např. $x \cdot \overline{y} + f(x, z) = (x \cdot (\overline{y})) + (f(x, z))$

= zápis logické funkce

Logická rovnice

= dva logické výrazy v relaci rovnosti $=$

- tzv. ekvivalentní úpravy = zachování (pravdivosti) rovnosti výrazů po úpravě: např. negace obou stran, logický součin/součet obou stran se stejným výrazem, ..., log. funkce obou stran se stejnými ostatními operandy funkce
- NEekvivalentní úpravy: např. "krácení" obou stran o stejný (pod)výraz, např. $x + y = x + z$ na $y = z$

Binární logika

Axiomy (Booleovy algebry)

- **komutativita**:

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad x + y = y + x$$

- **distributivita**:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

- **identita/neutrálnost (existence neutrální hodnoty)**:

$$\mathbf{I} \cdot x = x \qquad \mathbf{0} + x = x$$

- **komplementárnost**:

$$x \cdot \overline{x} = \mathbf{0} \qquad x + \overline{x} = \mathbf{I}$$

Logické operace

Vlastnosti základních logických operací

- **agresivita (nuly a jedničky)**:

$$\mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0} \qquad \mathbf{I} + x = \mathbf{I}$$

- **idempotence**:

$$x \cdot x = x \qquad x + x = x$$

- **asociativita**:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

- **involuce (dvojí negace)**:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- **De Morganovy zákony**:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

- **absorpce**:

$$x \cdot (x + y) = x \qquad x + x \cdot y = x$$

- a další

Logické operace

Axiomy a vlastnosti základních logických operací – použití

- důkazy: s využitím axiomů a již dokázaných vlastností, rozborem případů (přiřazením všech možných kombinací hodnot $\mathbf{0}$ a $\mathbf{I}$ proměnným)
- ekvivalentní úpravy logických výrazů – pro jejich zjednodušování
- ...

Logické operace

Další operace

Implikace

- nepravdivá, když první operand pravdivý a druhý nepravdivý, jinak pravdivá

x	y	$x \to y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**I**
I	**0**	**0**
I	**I**	**I**

- operátory: $x \to y$, $x \to y$ (výrokově i algebraicky implikace), $X \subseteq Y$ (množinově podmnožina)

Logické operace

Ekvivalence

- pravdivá, když operandy mají stejnou hodnotu, jinak nepravdivá

x	y	$x \equiv y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**0**
I	**0**	**0**
I	**I**	**I**

- operátory: $x \equiv y$, $x\ \mathrm{XNOR}\ y$, $x \equiv y$ (výrokově i algebraicky ekvivalence), $X \equiv Y$ (množinově ekvivalence nebo rovnost)

Logické operace

Nonekvivalence (negace ekvivalence, aritmetický součet modulo 2)

- pravdivá, když operandy mají různou hodnotu, jinak nepravdivá

x	y	$x \oplus y$
0	**0**	**0**
0	**I**	**I**
I	**0**	**I**
I	**I**	**0**

- operátory: $x \oplus y$, $x \mathrm{\ XOR\ } y$, $x \not\equiv y$ (výrokově i algebraicky negace ekvivalence), $X \not\equiv Y$ (množinově negace ekvivalence)

Logické operace

Shefferova funkce (negace logického součinu)

- nepravdivá, když oba operandy pravdivé, jinak pravdivá

x	y	$x \uparrow y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**I**
I	**0**	**I**
I	**I**	**0**

- operátory: $x \uparrow y$, $x \text{ NAND } y$

Logické operace

Piercova funkce (negace logického součtu)

- pravdivá, když oba operandy nepravdivé, jinak nepravdivá

x	y	$x \downarrow y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**0**
I	**0**	**0**
I	**I**	**0**

- operátory: $x \downarrow y$, $x \text{ NOR } y$

Logické funkce

- zadání **pravdivostní tabulkou**:
  - úplně – funkční hodnota $f(x_i)$ definována pro všech 2^n možných přiřazení hodnot proměnným $x_i, 0 \leq i < n$
  - neúplně – funkční hodnota pro některá přiřazení není definována
- **základní tvary** (výrazu):
  - **součinový (úplná konjunktivní normální forma, ÚKNF)** – log. součin log. součtů všech proměnných nebo jejich negací (úplných elementárních disjunkcí, ÚED)

$$(X_0 + \ldots + X_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (X_0 + \ldots + X_{n-1}) \quad X_i = x_i \text{ nebo } \overline{x_i} \text{ (\textbf{literál})}$$

  - **součtový (úplná disjunktivní normální forma, ÚDNF)** – log. součet log. součinů všech proměnných nebo jejich negací (úplných elementárních konjunkcí, ÚEK)

$$(X_0 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) + \ldots + (X_0 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) \quad X_i = x_i \text{ nebo } \overline{x_i}$$

Logické funkce

Převod log. funkce $\mathrm{f}(\mathrm{x_i})$ na základní tvar (normální formu)

- ekvivalentními úpravami a doplněním chybějících proměnných nebo jejich negací
- **tabulkovou metodou**:
  1. řádky pro všechna možná přiřazení hodnot všem proměnným x_i funkce (2^n pro $0 \leq i < n$)
  2. pro řádky s $f(x_i) = \mathbf{0}/\mathbf{I}$ sestroj log. součet/součin všech x_i pro $x_i = \mathbf{0}/\mathbf{I}$ nebo $\overline{x_i}$ pro $x_i = \mathbf{I}/\mathbf{0}$
  3. výsledná ÚKNF/ÚDNF je log. součinem/součtem těchto log. součtů/součinů (ÚED/ÚEK)

x	y	z	$f(x,y,z)$	ÚED	ÚEK
0	**0**	**0**	**0**	$x+y+z$	
0	**0**	**I**	**0**	$x+y+\overline{z}$	
0	**I**	**0**	**0**	$x+\overline{y}+z$	
0	**I**	**I**	**I**		$\overline{x}\cdot y\cdot z$
I	**0**	**0**	**0**	$\overline{x}+y+z$	
I	**0**	**I**	**I**		$x\cdot\overline{y}\cdot z$
I	**I**	**0**	**I**		$x\cdot y\cdot\overline{z}$
I	**I**	**I**	**I**		$x\cdot y\cdot z$

ÚKNF($f(x,y,z)$): $(x+y+z)\cdot(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+y+z)$
ÚDNF($f(x,y,z)$): $\overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot\overline{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot z$

ÚKOL

Převeďte několik log. funkcí se třemi a více proměnnými do ÚKNF a ÚDNF.

Logické funkce

Zjednodušení výrazu logické funkce

= optimalizace za účelem dosažení co nejmenšího počtu operátorů (v kompromisu s min. počtem druhů operátorů)

Algebraická minimalizace

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z \\
&\quad \text{// dvakrát přičteme } x \cdot y \cdot z \text{ (idempotence)} \\
f &= (\overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z) + (x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot z) + (x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z) \\
&\quad \text{// distributivita} \\
f &= y \cdot z \cdot (\overline{x} + x) + x \cdot z \cdot (\overline{y} + y) + x \cdot y \cdot (\overline{z} + z) \text{ // komplementárnost} \\
f &= x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z
\end{aligned}
$$

- pro složitější výrazy intelektuálně náročná (podobně jako důkaz) – kdy jaké ekvivalentní úpravy?

Logické funkce

Zjednodušení výrazu logické funkce

Karnaughova metoda (Veitch diagram)

- nahrazení algebraických ekvivalentních úprav algoritmickými geometrickými postupy
- nalezení minimálního výrazu funkce v (neúplném) součtovém tvaru

1. pro n proměnných funkce tabulka s 2^n buňkami, v maximálně stejném počtu řádků a sloupců, reprezentujícími všechny možné log. součiny (ÚEK) základního součtového tvaru (ÚDNF), součiny reprezentované sousedními buňkami se liší právě v jednom literálu
2. pro výraz funkce v ÚDNF tzv. **Karnaughova mapa (K-mapa)** $=$ vyplnění tabulky $\mathbf{I}$ v buňkách reprezentujících ÚEK
3. nalezení minimálního počtu skupin buněk v mapě, tvořících maximální obdélníkové oblasti buněk obsahujících pouze $\mathbf{I}$ v počtu mocniny 2 (i jedna), a pokrývajících všechny $\mathbf{I}$ v mapě (skupiny se mohou překrývat a krajní buňky jsou také „sousední“ v oblasti)
4. součiny, reprezentované buňkami ve skupinách, po vyřazení proměnných vyskytujících se i s jejich negací $=$ log. součiny výsledného (neúplného) součtového tvaru

Logické funkce

Zjednodušení výrazu logické funkce

Karnaughova metoda (Veitch diagram)

$$f = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$$

	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{x} \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot \overline{y}$
$\overline{z}$			I	
z		I	I	I

Obrázek: Karnaughova mapa

$$f = x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z$$

- pro složitější výrazy (funkcí více proměnných) výpočetně náročná – hledání skupin

Další algoritmické metody: tabulační (Quine-McCluskey), branch-and-bound (Petrick), Esspreso logic minimizer aj.

ÚKOL

Pokuste se minimalizovat log. funkce z přechozího úkolu.

Logické funkce

Věta (O počtu log. funkcí)

Existuje právě $2^{(2^n)}$ *logických funkcí s* n *proměnnými (*n*-árních).*

Logické funkce

Věta (O počtu log. funkcí)

Existuje právě $2^{(2^n)}$ *logických funkcí s* n *proměnnými (*n*-árních).*

Funkce f^0 žádné proměnné (konstantní, nulární)

f_0	f_1
0	**I**

Funkce f^1 jedné proměnné (unární)

x	f_0 **0**	f_1 x	f_2 $\overline{x}$	f_3 **I**
0	**0**	**0**	**I**	**I**
I	**0**	**I**	**0**	**I**

Funkce f^2 dvou proměnných (binární)

x	y	f_0 **0**	f_1 $\cdot$	f_2	f_3 x	f_4	f_5 y	f_6 $\oplus$	f_7 $+$	f_8 $\downarrow$	f_9 $\equiv$	f_{10} $\overline{y}$	f_{11}	f_{12} $\overline{x}$	f_{13} $\rightarrow$	f_{14} $\uparrow$	f_{15} **I**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
0	**I**	**0**	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**I**	**I**	**0**	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**I**	**I**
I	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**0**	**0**	**I**	**I**	**0**	**0**	**I**	**I**	**0**	**0**	**I**	**I**
I	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**

Logické funkce

Funkce více než dvou proměnných

pro $n = 3$ (ternární funkce):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \cdot f(\mathbf{I}, y, z) + \overline{x} \cdot f(\mathbf{0}, y, z) \\ &= (\overline{x} + f(\mathbf{I}, y, z)) \cdot (x + f(\mathbf{0}, y, z)) \end{aligned}$$

a podobně pro $n > 3$

Logické funkce

Funkce více než dvou proměnných
pro $n = 3$ (ternární funkce):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \cdot f(\mathbf{I}, y, z) + \overline{x} \cdot f(\mathbf{0}, y, z) \\ &= (\overline{x} + f(\mathbf{I}, y, z)) \cdot (x + f(\mathbf{0}, y, z)) \end{aligned}$$

a podobně pro $n > 3$

Věta (O reprezentaci log. funkcí, Shannonův expanzní teorém)

Jakoukoliv logickou funkci libovolného počtu proměnných lze vyjádřit pomocí logických funkcí dvou proměnných (binárních, např. logických operací).

Logické funkce

Úplný systém logických funkcí

= množina log. funkcí, pomocí kterých je možné vyjádřit jakoukoliv log. funkci (libovolného počtu proměnných)

→ množina binárních log. funkcí (Věta o reprezentaci log. funkcí)

- (1) negace $\overline{x}$, log. součin $x \cdot y$ a log. součet $x + y$
- (2) negace $\overline{x}$ a implikace $x \rightarrow y$
- a další

Logické funkce

Úplný systém logických funkcí

$=$ množina log. funkcí, pomocí kterých je možné vyjádřit jakoukoliv log. funkci (libovolného počtu proměnných)

$\rightarrow$ množina binárních log. funkcí (Věta o reprezentaci log. funkcí)

- (1) negace $\overline{x}$, log. součin $x \cdot y$ a log. součet $x + y$
- (2) negace $\overline{x}$ a implikace $x \rightarrow y$
- a další

Minimální úplný systém logických funkcí

$=$ úplný systém, ze kterého nelze žádnou funkci vyjmout tak, aby zůstal úplný

- (1) NENÍ
- (2) JE
- (3) negace $\overline{x}$ a log. součin $x \cdot y$
- (4) negace $\overline{x}$ a log. součet $x + y$
- a další

Logické funkce

Minimální úplný systém logických funkcí

Jediná funkce:

- **Shefferova** $\uparrow$ (negace log. součinu)
- **Piercova** $\downarrow$ (negace log. součtu)

Logické funkce

Minimální úplný systém logických funkcí

Jediná funkce:

- **Shefferova** $\uparrow$ (negace log. součinu)
- **Piercova** $\downarrow$ (negace log. součtu)

Vyjádření logické funkce pomocí Shefferovy nebo Piercovy funkce

1. vyjádření funkce v základním součtovém tvaru (ÚDNF)
2. zjednodušení ÚDNF funkce, např. pomocí Karnaughovy metody
3. aplikace De Morganových zákonů, involuce a idempotence pro úpravu výrazu do tvaru, který obsahuje pouze Shefferovy nebo pouze Piercovy funkce

Logické funkce

Vyjádření logické funkce pomocí Shefferovy nebo Piercovy funkce

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot\overline{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot z \\
f &= x\cdot y + y\cdot z + x\cdot z \\
f &= \overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}} + x\cdot z \\
f &= \overline{\overline{\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}}}\cdot\overline{x\cdot z}} \\
f &= \overline{\overline{\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}}\cdot\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}}}\cdot\overline{x\cdot z}}
\end{aligned}
$$

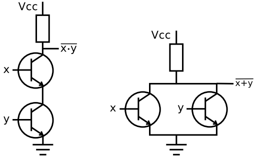
$$
\begin{aligned}
f &= (\overline{x}+y+z)\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(x+y+\overline{z})\cdot(x+y+z) \\
f &= (x+y)\cdot(y+z)\cdot(x+z) \\
f &= \overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}\cdot(x+z) \\
f &= \overline{\overline{\overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}}+\overline{x+z}} \\
f &= \overline{\overline{\overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}+\overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}}+\overline{x+z}}
\end{aligned}
$$

ÚKOL

Vyjádřete log. operace negace, log. součin, log. součet, implikace, ekvivalence a nonekvivalence pomocí (1) Shefferovy funkce a (2) Piercovy funkce.

Fyzická realizace logických funkcí

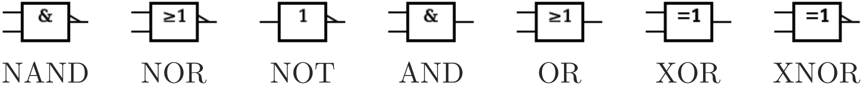
- dříve pomocí **spínacích relé** a **elektronek**, plus pasivní součástky (rezistor aj.)
- dnes pomocí **tranzistorů** (a diod a pasivních součástek) v **integrovaných obvodech**: technologie RTL, DTL, **TTL**, **CMOS**, **MOSFET** aj.



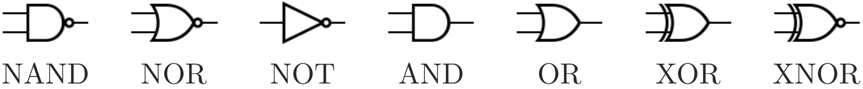
Obrázek: Příklad realizace log. operací NAND a NOR (v rezistorovětranzistorové logice, RTL)

- **logický člen, hradlo** $=$ realizace log. operace (pomocí integrovaného obvodu)
  - (binární) vstupy $\sim$ log. proměnné – i více než dvě (rozšíření binárních operací)
  - (binární) výstup $\sim$ výsledek log. operace (funkční hodnota)
  - stavy (signály) na vstupech/výstupu $=$ log. (binární) hodnoty $\mathbf{0}/\mathbf{I}$ – míra informace s jednotkou $\mathbf{1}$ **bit**
- **logický obvod** $=$ realizace (složitější) log. funkce nebo více funkcí současně – symbolické značky log. členů ve schématech zapojení obvodu

Fyzická realizace logických funkcí



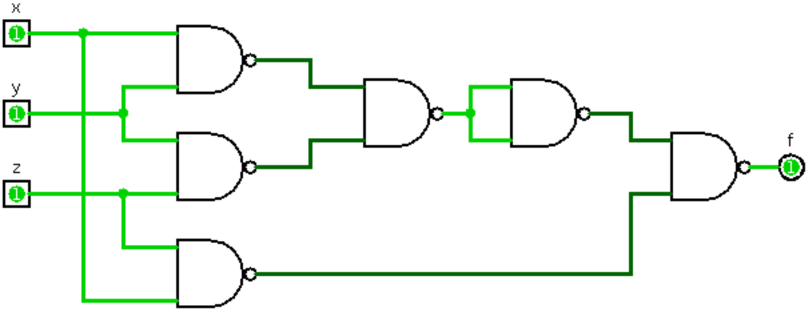
Obrázek: Symbolické značky logických členů (IEC)



Obrázek: Symbolické značky logických členů (tradiční, ANSI)

Fyzická realizace logických funkcí

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot z}} \cdot \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot z}}} \cdot \overline{x \cdot z}}$$



Obrázek: Schéma zapojení log. obvodu realizujícího log. funkci f pomocí log. členů realizujících log. operaci NAND

ÚKOL

Nakreslete schéma zapojení log. obvodu realizujícího log. operace NOT, AND, OR, implikace, ekvivalence a XOR pomocí log. členů realizujících operaci (1) NAND a (2) NOR.

Logické obvody

- jeden výstup = realizace jedné log. funkce
- více výstupů = realizace více log. funkcí současně → realizace **vícebitové log. funkce** $^{\mathbf{m}}\mathbf{f}$
  - n-tice vstupů ∼ **vícebitové ($\mathbf{n}$-bitové) log. proměnné** $^{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \mathbf{x_{n-1} \dots x_i \dots x_0}$ → **vícebitový (n-bitový) log. obvod**

Logické obvody

- jeden výstup = realizace jedné log. funkce
- více výstupů = realizace více log. funkcí současně → realizace **vícebitové log. funkce** $^{\mathbf{m}}\mathbf{f}$
  - n-tice vstupů ∼ **vícebitové ($\mathbf{n}$-bitové) log. proměnné** $^{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \mathbf{x_{n-1}} \dots \mathbf{x_i} \dots \mathbf{x_0}$ → **vícebitový (n-bitový) log. obvod**

- **kombinační**: stavy na výstupech obvodu (funkční hodnoty) závisí pouze na okamžitých stavech na jeho vstupech (hodnotách proměnných)
- **sekvenční**: stavy na výstupech obvodu (funkční hodnoty) závisí nejen na okamžitých stavech na jeho vstupech (hodnotách proměnných), ale i na předchozích stavech na vstupech

Kombinační logické obvody

- stavy na výstupech obvodu (funkční hodnoty) závisí pouze na okamžitých stavech na jeho vstupech (hodnotách proměnných)
- jedné kombinaci stavů na vstupech odpovídá jediná kombinace stavů na výstupech

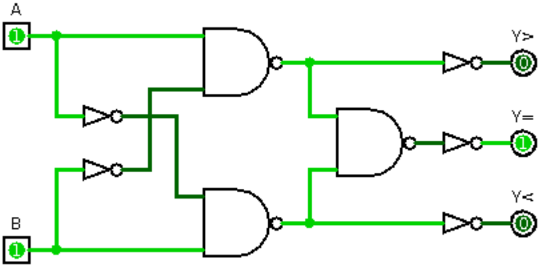
Komparátor

- srovnává dvě hodnoty A a B na vstupech
- tři výstupy udávající pravdivost vztahů $A < B$, $A > B$ a $A = B \Rightarrow$ tříbitová funkce $Y_< = Y(A < B), Y_> = Y(A > B), Y_= = Y(A = B)$:

$$Y_< = \overline{A} \cdot B \quad Y_> = A \cdot \overline{B} \quad Y_= = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$Y_< = \overline{\overline{\overline{A} \cdot B}} \quad Y_> = \overline{\overline{A \cdot \overline{B}}} \quad Y_= = \overline{\overline{\overline{\overline{A} \cdot B} \cdot \overline{A \cdot \overline{B}}}}$$

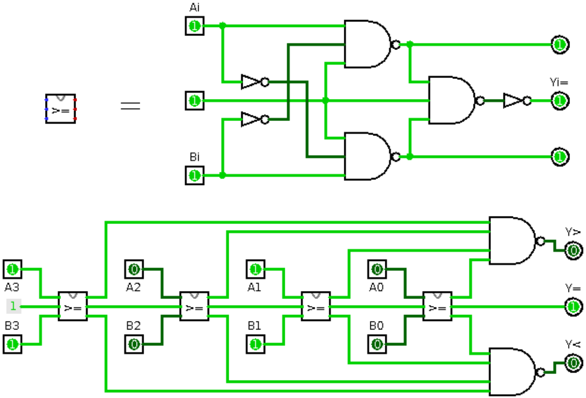
A	B	$Y_<$	$Y_>$	$Y_=$
0	0	0	0	I
0	I	I	0	0
I	0	0	I	0
I	I	0	0	I



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení (jednobitového) komparátoru

Komparátor

- vícebitový: zřetězené zapojení jednobitových pro každý řád i vícebitových (n-bitových) hodnot $A = A_{n-1} \dots A_i \dots A_0$ a $B = B_{n-1} \dots B_i \dots B_0$ od nejvýznamnějšího $n-1$ po nejméně významný 0



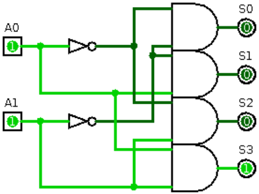
Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového komparátoru

Dekodér

- nastaví (na $\mathbf{I}$) jeden z 2^n výstupů S_i odpovídající n-bitové hodnotě na adresním (řídícím) vstupu A
- např. dvoubitový (dvoubitový adresní vstup, 4 výstupy) $\Rightarrow$ čtyřbitová funkce $S_0 = S(A = 00), S_1 = S(A = 10), S_2 = S(A = 01), S_3 = S(A = 11)$:

$$S_0 = \overline{A_0} \cdot \overline{A_1} \qquad S_1 = A_0 \cdot \overline{A_1} \qquad S_2 = \overline{A_0} \cdot A_1 \qquad S_3 = A_0 \cdot A_1$$

A_0	A_1	S_0	S_1	S_2	S_3
0	**0**	**I**	**0**	**0**	**0**
I	**0**	**0**	**I**	**0**	**0**
0	**I**	**0**	**0**	**I**	**0**
I	**I**	**0**	**0**	**0**	**I**



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení dvoubitového dekodéru

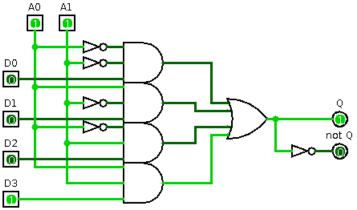
- použití: dekódování adresy (řídící hodnoty) pro výběr např. místa v paměti (části obvodu)

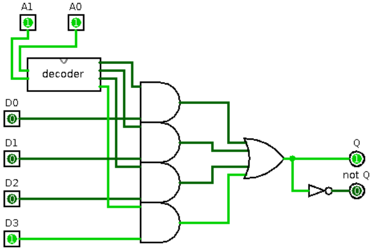
Multiplexor

- předává na výstup Q hodnotu na jednom z 2^n datových vstupů D_j dle n-bitové hodnoty na adresním (řídícím) vstupu A
- vedle výstupu Q obvykle ještě negovaný (invertovaný) výstup $\overline{Q}$
- např. dvoubitový (4 datové vstupy, dvoubitový adresní vstup) realizuje funkci

$$Q = \overline{A_0} \cdot \overline{A_1} \cdot D_0 + A_0 \cdot \overline{A_1} \cdot D_1 + \overline{A_0} \cdot A_1 \cdot D_2 + A_0 \cdot A_1 \cdot D_3$$

A_0	A_1	Q
0	**0**	D_0
I	**0**	D_1
0	**I**	D_2
I	**I**	D_3





Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení dvoubitového multiplexoru

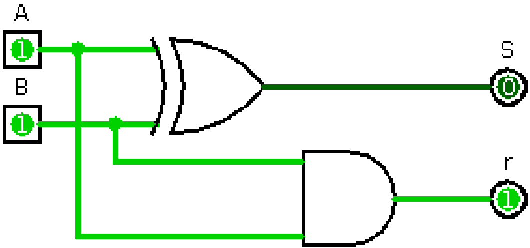
- použití: výběr (multiplexování) datových vstupů na základě adresy (řídící hodnoty)

Sčítačka

- (aritmeticky) sčítá dvě hodnoty A a B (plus přenos r_{i-1} z nižšího řádu) na vstupech, s přenosem r_i do vyššího řádu
- dva výstupy, pro součet S (aritmetický modulo 2) a přenos r $\Rightarrow$ dvoubitová funkce
- **poloviční sčítačka (half adder)** $=$ bez přenosu z nižšího řádu:

$$S = A \oplus B \qquad r = A \cdot B$$

A	B	S	r
0	0	0	0
0	I	I	0
I	0	I	0
I	I	0	I



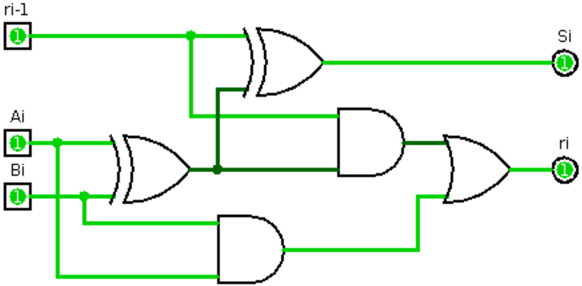
Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení (jednobitové) poloviční sčítačky

Sčítačka

- **plná sčítačka (full adder)** = s přenosem r_{i-1} z nižšího řádu (součet S_i v řádu i a přenos r_i do vyššího řádu):

$$S_i = A_i \oplus B_i \oplus r_{i-1} \qquad r_i = A_i \cdot B_i + (A_i \oplus B_i) \cdot r_{i-1} \qquad (r_{-1} = 0)$$

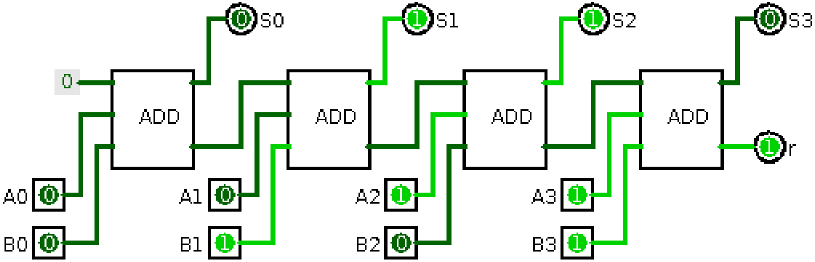
A_i	B_i	r_{i-1}	S_i	r_i
0	0	0	0	0
0	I	0	I	0
I	0	0	I	0
I	I	0	0	I
0	0	I	I	0
0	I	I	0	I
I	0	I	0	I
I	I	I	I	I



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení (jednobitové plné) sčítačky (pro řád i)

Sčítačka

- vícebitová (ripple-carry adder): zřetězené zapojení jednobitových pro každý řád i vícebitových (n-bitových) hodnot $A = A_{n-1} \ldots A_i \ldots A_0$ a $B = B_{n-1} \ldots B_i \ldots B_0$ od nejméně významného 0 po nejvýznamnější $n-1$
- použití: (aritmetický) součet hodnot A a B (binárně reprezentovaných čísel = ve dvojkové soustavě), s přenosem do vyššího řádu



Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitové sčítačky

Násobička

- (aritmeticky) násobí dvě hodnoty A a B na vstupech: $M = A \cdot B$ (jednobitově)

Násobička

- (aritmeticky) násobí dvě hodnoty A a B na vstupech: $M = A \cdot B$ (jednobitově)
- vícebitová: zapojení jednobitových násobiček a sčítaček pro dvojnásobný počet řádů vícebitových (n-bitových) hodnot $A = A_{n-1} \ldots A_i \ldots A_0$ a $B = B_{n-1} \ldots B_i \ldots B_0$:

$$
\begin{aligned}
M &= (A_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + A_1 \cdot 2 + A_0) \cdot (B_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + B_1 \cdot 2 + B_0) \\
&= A_{n-1} \cdot B_{n-1} \cdot 2^{2(n-1)} + \ldots + (A_{n-1} \cdot B_1 + \ldots + A_1 \cdot B_{n-1}) \cdot 2^{(n-1)+1} + \\
&\quad (A_{n-1} \cdot B_0 + \ldots + A_0 \cdot B_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + \ldots + (A_1 \cdot B_1 + \ldots) \cdot 2^{1+1} + (A_1 \cdot B_0 + A_0 \cdot B_1) \cdot 2 + A_0 \cdot B_0
\end{aligned}
$$

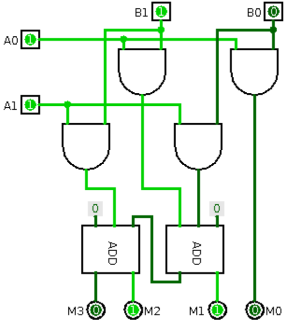
Násobička

- (aritmeticky) násobí dvě hodnoty A a B na vstupech: $M = A \cdot B$ (jednobitově)
- vícebitová: zapojení jednobitových násobiček a sčítaček pro dvojnásobný počet řádů vícebitových (n-bitových) hodnot $A = A_{n-1} \ldots A_i \ldots A_0$ a $B = B_{n-1} \ldots B_i \ldots B_0$:

$$
\begin{aligned}
M &= (A_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + A_1 \cdot 2 + A_0) \cdot (B_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + B_1 \cdot 2 + B_0) \\
&= A_{n-1} \cdot B_{n-1} \cdot 2^{2(n-1)} + \ldots + (A_{n-1} \cdot B_1 + \ldots + A_1 \cdot B_{n-1}) \cdot 2^{(n-1)+1} + \\
&\quad (A_{n-1} \cdot B_0 + \ldots + A_0 \cdot B_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + \ldots + (A_1 \cdot B_1 + \ldots) \cdot 2^{1+1} + (A_1 \cdot B_0 + A_0 \cdot B_1) \cdot 2 + A_0 \cdot B_0
\end{aligned}
$$

(+ značí aritmetické sčítání)

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & A_1 A_0 \\
 & & \cdot & B_1 B_0 \\
\hline
 & & A_1 \cdot B_0 & A_0 \cdot B_0 \\
+ & A_1 \cdot B_1 & A_0 \cdot B_1 & \\
\hline
 & \leftarrow A_1 \cdot B_1 & \leftarrow A_1 \cdot B_0 + A_0 \cdot B_1 & A_0 \cdot B_0
\end{array}
$$



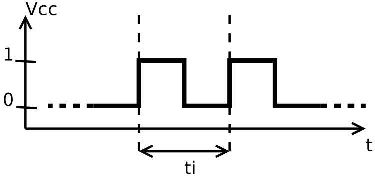
Obrázek: Schéma dvoubitového násobení a zapojení dvoubitové násobičky

ÚKOL

Nakreslete schéma zapojení log. obvodu představujícího „základ“ aritmeticko-logické jednotky (ALU) procesoru, realizující aritmetické operace součtu a násobení a log. operace NAND a NOR dvou dvoubitových hodnot (binárně reprezentovaných čísel) na datových vstupech obvodu, kde prováděná operace je určena dvoubitovou hodnotou na řídícím vstupu obvodu.

Sekvenční logické obvody

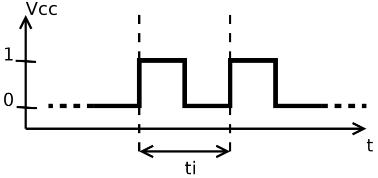
- stavy na výstupech obvodu (funkční hodnoty) závisí nejen na okamžitých stavech na jeho vstupech (hodnotách proměnných), ale i na předchozích stavech na vstupech – zachyceny **vnitřním stavem obvodu**
- nutné identifikovat a synchronizovat stavy obvodu v čase
- čas: periodický impulzní signál = „hodiny“ (clock), diskrétně určující okamžiky synchronizace obvodu



Obrázek: Časový signál „hodin“ (clock)

Sekvenční logické obvody

- stavy na výstupech obvodu (funkční hodnoty) závisí nejen na okamžitých stavech na jeho vstupech (hodnotách proměnných), ale i na předchozích stavech na vstupech – zachyceny **vnitřním stavem obvodu**
- nutné identifikovat a synchronizovat stavy obvodu v čase
- čas: periodický impulzní signál = „hodiny“ (clock), diskrétně určující okamžiky synchronizace obvodu



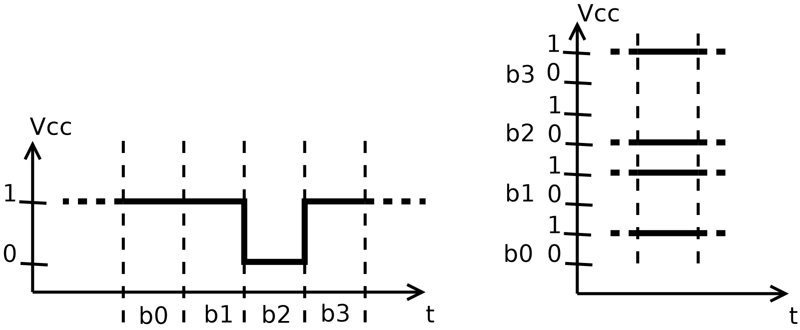
Obrázek: Časový signál „hodin“ (clock)

→ zpětné vazby z (některých) výstupů na (některé) vstupy

Sekvenční logické obvody

Přenos dat (vícebitových hodnot):

- **sériový**: hodnoty $\mathbf{0}/\mathbf{I}$ (bity) postupně v čase za sebou, po jednom vodiči
- **paralelní**: bity zároveň v čase, po více vodičích
- úlohy transformace mezi sériovým a paralelním přenosem



Obrázek: Sériový a paralelní přenos dat

Klopné obvody (flip-flop)

- nejjednodušší sekvenční obvody
- **astabilní**: žádný stabilní stav, periodické překlápění výstupů z jednoho stavu do druhého („kmitání“); použití jako generátory impulzů
- **monostabilní**: jeden stabilní stav na výstupech, po určitém řídícím signálu po definovanou dobu v nestabilním stavu; použití k vytváření impulzů dané délky
- **bistabilní**: oba stavy na výstupech stabilní, trvání jednoho dokud není určitým řídícím signálem překlopení do druhého; použití pro realizaci **pamětí**

Klopné obvody (flip-flop)

- nejjednodušší sekvenční obvody
- **astabilní**: žádný stabilní stav, periodické překlápění výstupů z jednoho stavu do druhého („kmitání“); použití jako generátory impulzů
- **monostabilní**: jeden stabilní stav na výstupech, po určitém řídícím signálu po definovanou dobu v nestabilním stavu; použití k vytváření impulzů dané délky
- **bistabilní**: oba stavy na výstupech stabilní, trvání jednoho dokud není určitým řídícím signálem překlopení do druhého; použití pro realizaci **pamětí**

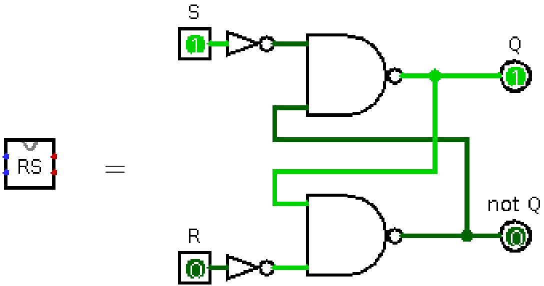
Řízení:

- **asynchronně**: signály/stavy ($\mathbf{0}$ nebo $\mathbf{I}$) na (datových) vstupech
- **synchronně**: (periodickým) signálem na hodinovém vstupu
- **hladinou** signálu (latch): horní (hodnota $\mathbf{I}$) nebo dolní ($\mathbf{0}$)
- **hranami** signálu: nástupní ($\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{I}$ u horní hladiny) nebo sestupní ($\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{I}$ u dolní hladiny)

Klopný obvod SR/RS

- nejjednodušší bistabilní, základ ostatních
- asynchronní vstupy S (Set) pro nastavení hodnoty (na $\mathbf{I}$) a R (Reset) pro nulování hodnoty (na $\mathbf{0}$) na výstupu Q (v čase i)
- vedle výstupu Q obvykle ještě negovaný (invertovaný) výstup $\overline{Q}$
- při stavu $S = R = \mathbf{0}$ **„pamatování“ hodnoty** na výstupu Q (a Q', v čase i)
- stav $S = R = \mathbf{I}$ „nedefinovaný“ – varianty preferující vstup S (= SR) nebo R (= RS)

S	R	Q_i	$\overline{Q_i}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	N/A	N/A

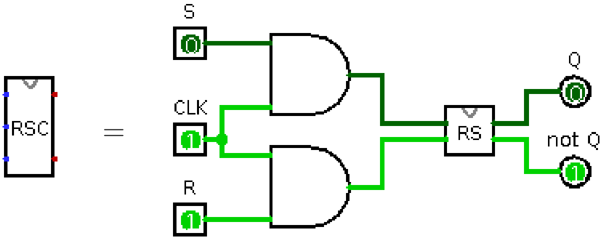


Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení klopného obvodu SR/RS

Klopný obvod SR/RS

- synchronní varianta s hodinovým (synchronizačním) vstupem CLK – „funkční“ pouze při $CLK = \mathbf{I}$, jinak „pamatování“ hodnoty na výstupu Q (a Q', v čase i):

S	R	CLK	Q_i	$\overline{Q_i}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	N/A	N/A



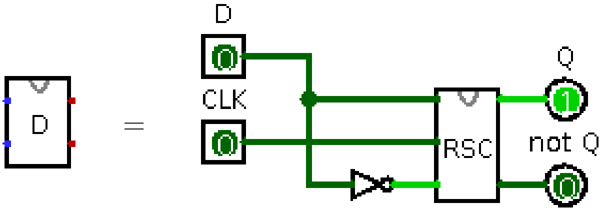
Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení klopného obvodu SR/RS s hodinovým vstupem CLK

- varianta Master-Slave: dva obvody SR/RS (s hodinovým vstupem, u druhého obvodu negovaný) za sebou, nastavení na vzestupnou hranu na hodinovém vstupu, výstup na sestupní

Klopný obvod D

- stav $S = R = \mathbf{I}$ u obvodu SR/RS nemůže nastat
- **jednobitový paměťový člen**

D	CLK	Q_i	$\overline{Q_i}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$



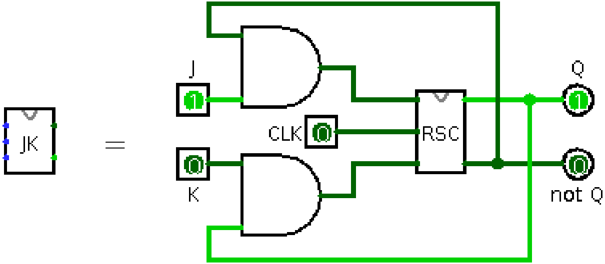
Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení klopného obvodu D

- varianta Master-Slave: obvody D a SR/RS (s hodinovým vstupem, u druhého obvodu negovaný) za sebou, nastavení na vzestupnou hranu na hodinovém vstupu, výstup na sestupní

Klopný obvod JK

- při stavu $S = R = \mathbf{I}$ u obvodu SR/RS invertuje výstup Q (a Q', v čase i)

J	K	CLK	Q_i	$\overline{Q_i}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\overline{Q_{i-1}}$	Q_{i-1}

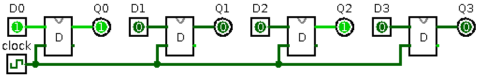


Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení klopného obvodu JK

Další sekvenční logické obvody

Paralelní registr (střádač)

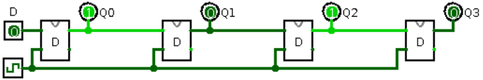
- paměť pro vícebitovou hodnotu (dodanou paralelně na více vstupů)
- paralelní zapojení klopných obvodů D



Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového paralelního registru

Sériový (posuvný) registr

- paměť pro vícebitovou hodnotu dodanou sériově na (jednom) vstupu (synchronně po jednotlivých řádech)
- zřetězené zapojení klopných obvodů D
- použití pro transformaci sériových dat na paralelní

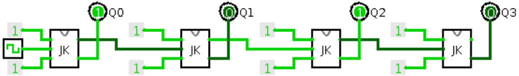


Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového sériového registru

Další sekvenční logické obvody

Čítač

- paměť počtu impulzů na hodinovém vstupu – binárně reprezentovaný počet na vícebitovém výstupu
- zřetězené zapojení klopných obvodů JK



Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového čítače

Sériová sčítačka/násobička

- (aritmetické) sčítání/násobení hodnot dodaných sériově na vstupy (synchronně po jednotlivých řádech)
- zřetězené zapojení sériových registrů pro hodnoty a sčítačky/násobičky

ÚKOL

Nakreslete schéma zapojení log. obvodu realizujícího děličku frekvence signálu na hodinovém vstupu obvodu faktorem 1 (= původní frekvence), 2, 4 a 8, kde faktor je určen dvoubitovou hodnotou na řídícím vstupu obvodu.